ANALISIS REGRESI TERPOTONG (*TRUNCATED*) ATAS BAWAH DAN PENERAPANNYA

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh:
Ika Puji Astuti
NIM. 06305144034

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

PERSETUJUAN

ANALISIS REGRESI TERPOTONG (*TRUNCATED*) ATAS BAWAH DAN PENERAPANNYA

Oleh:
Ika Puji Astuti
06305144034

SKRIPSI

Telah disetujui pada tanggal 19 April 2011
Untuk diujikan di depan Panitia Penguji Skripsi Prodi Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Pembimbing,

Dr. Djamilah BW, M.Si
NIP.196103031986012001

SKRIPSI

ANALISIS REGRESI TERPOTONG (*TRUNCATED*) ATAS BAWAH DAN PENERAPANNYA

Disusun oleh:

Ika Puji Astuti
06305144034

Telah dipertahankan di depan dewan Penguji Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta Pada tanggal 26 April 2011 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Susunan Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Dr. Djamilah, B.W. NIP:19610303 198601 2 001	Ketua Penguji		23/5-2011
Dr. Hartono NIP: 19620329 198702 1 002	Sekretaris Penguji		12/5/11
M. Susanti, M.Si. NIP: 19640314 198901 2 001	Penguji Utama		23-5-2011
Elly Arliani, M.Si. NIP: 19670816 199203 2 001	Penguji Pendamping		13-5-2011

Yogyakarta, 26 April 2011
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan

Dr. Ariswan
NIP: 19590914 198803 1 003

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: Ika Puji Astuti
NIM	: 06305144034
Prodi/Jurusan	: Matematika/Pendidikan Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul TAS	: Analisis Regresi Terpotong (*Truncated*) Atas Bawah dan Penerapannya

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang sepengetahuan saya tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau pendapat yang ditulis atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi lain kecuali pada bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila terbukti pernyataan saya ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya.

Yogyakarta, 05 April 2011

Yang menyatakan

Astuti

Ika Puji Astuti

06305144034

MOTTO

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(QS. Al – Baqarah : 286)

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَٱنصَبْ ﴿٧﴾ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرْغَب ﴿٨﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sunguh – sunguh (urusan) yang lain. Dan kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap"

(QS. Al – Insyiroh : 6 - 8)

PESEMBAHAN

Segala puji hanya bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam yang senantiasa memberikan karunia dan petunjuk, sehingga saya dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Karya ini ku persembahkan untuk:

"Orangtuaku Tercinta"

Terimakasih atas segala cinta, kasih sayang, perhatian, pengorbanan, dukungan, dan untaian do'a yang tak pernah terputus untuk Ananda. Semoga karya kecil ini dapat menjadi salah satu wujud bakti Ananda untuk Bapak dan Ibu Tercinta.

"Adikku Tersayang"

Meskipun kau terkadang menyebalkan, namun kaulah satu – satunya saudara kandungku, dan aku sangat menyayangimu.

"Guru – guru yang ku hormati"

Terimakasih untuk ilmu –ilmu yang telah diajarkan, pengalaman, dan segala inspirasi yang ditularkan.

Sahabat – sahabatku: Wiwik, desi, rita, mita, ayomi, dan Teman – teman Mat NR'06. Thans tuk solidaritas, dukungan, n' kegilaannya selama ini. Kalian kan slalu dihati.

ANALISIS REGRESI TREPOTONG (*TRUNCATED*) ATAS BAWAH DAN PENERAPANNYA

Oleh:
Ika Puji Astuti
NIM. 06305144034

ABSTRAK

Penyusunan skripsi ini adalah untuk menjelaskan cara memperoleh mean, variansi, dan model regresi terpotong atas bawah, cara memperoleh estimator parameter pada model regresi terpotong atas bawah, dan menjelaskan contoh penerapan model regresi terpotong atas bawah.

Pada analisis regresi terpotong atas bawah, pembatasan nilai pada variabel dependen menyebabkan distribusinya berubah menjadi distribusi normal terpotong atas bawah.

Mean *Y* yang semula $\boldsymbol{\mu}$ berubah menjadi mean terpotong atas bawah

$$E(Y|a < Y < b) = \mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$$

variansi *Y* yang semula $\boldsymbol{\sigma^2}$ berubah menjadi:

$$Var(Y|a < Y < b) = \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right)$$

dan model regresi yang semula $\boldsymbol{Y_i = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon}$ berubah menjadi model regresi terpotong sebagai berikut:

$$Y_i^* = E(Y_i|a < Y_i < b) + \varepsilon_i = X_i'\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)$$

Dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$, $\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$, $\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$, $\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$, $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi(z)\,dz$, $\boldsymbol{a}$ = nilai batas bawah, $\boldsymbol{b}$ = nilai batas atas.

$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1$ *untuk setiap* α.

$\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1$ *untuk setiap* β.

Untuk memperjelas kajian tentang analisis regresi terpotong atas bawah, maka diberikan contoh penerapannya. Pada contoh (1), dilakukan penelitian untuk mengetahui hubungan antara besar modal, biaya pemasaran, dengan nilai penjualan. Dengan penelitian yang dibatasi pada nilai penjualan yang berada diantara Rp.1 Milyar sampai Rp.5 Milyar. Pada contoh (2), dilakukan penelitian untuk mengetahui hubungan antara persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran. Dengan penelitian dibatasi pada angka kematian bayi yang berada diantara 40 sampai 70 angka kematian. Dari penelitian tersebut diperoleh bahwa model regresi terpotong lebih tepat digunakan untuk menggambarkan hubungan dalam kasus data terpotong dibandingkan dengan regresi linier. Hal itu ditunjukkan dengan membandingkan nilai R^2 dan *Ajusted* R^2 pada model regresi terpotong dengan nilai R^2 dan *Ajusted* R^2 pada regresi linier. Hasilnya nilai R^2 dan *Ajusted* R^2 pada model regresi terpotong untuk dua contoh tersebut lebih besar daripada nilai R^2 dan *Ajusted* R^2 pada regresi linier.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis haturkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga memberikan kekuatan, kemudahan, kemampuan dan kelapangan hati kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir skripsi dengan judul “Analisis Regresi Terpotong (*Truncated*) Atas Bawah dan Penerapannya” guna memenuhi sebagian persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Penulis menyadari akan kelemahan serta keterbatasan yang ada sehingga dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis memperoleh bantuan dari berbagai pihak. Dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan sebagai Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Hartono sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.S sebagai Ketua Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
4. Ibu Himmawati P.L, M.Si sebagai pembimbing akademik yang berkenan memberikan informasi dan pengarahan selama penulis duduk di bangku perkuliahan.

5. Ibu Dr. Djamillah B.W, M.Si sebagai pembimbing skripsi yang berkenan memberikan waktu bimbingan serta dengan penuh kesabaran memberi pengarahan dalam menyusun skripsi.
6. M. Susanti, M.Si, Elly Arliani, M.Si. dan Dr. Hartono sebagai penguji skripsi yang berkenan memberikan pertanyaan, masukan (saran) untuk perbaikan skripsi.
7. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan ilmu kepada penulis, semoga ilmu yang diberikan dapat bermanfaat.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan baik isi maupun susunannya. Untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun senantiasa penulis harapkan. Semoga amal dan kebaikan dari semua pihak mendapatkan balasan dari Allah SWT. Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat tidak hanya bagi penulis tetapi juga bagi para pembaca. Amin.

Yogyakarta, 05 April 2011

Penulis

Ika Puji Astuti
06305144034

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam penelitian sering dijumpai dua variabel atau lebih yang saling berhubungan. Peneliti biasanya menggunakan model untuk menggambarkan suatu hubungan fungsional antar variabel. Dengan model itu peneliti akan berusaha memahami, menerangkan, mengendalikan, dan memprediksi hubungan antar variabel yang diteliti. Teknik analisis yang digunakan untuk mengambarkan hubungan antara dua atau lebih variabel tersebut dinamakan analisis regresi. Variabel dalam analisis regresi sering dinamakan variabel dependen atau variabel tak bebas (respons) Y dan variabel independen atau variabel bebas (regresor) X.

Pada model regresi linear $Y_i = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + ... + X_i\beta_i + \varepsilon_i$, data sampel dianggap berasal dari suatu populasi yang berdistribusi normal dengan mean μ_i dan variansi σ^2. Hal ini berarti bahwa variabel dependen Y_i berdistribusi $N(\mu_i,\sigma^2)$ dan ε_i adalah galat acak yang diasumsikan berdistribusi normal $N(0,\sigma^2)$ (Sembiring, 2003 : 38). Model regresi linear ini merupakan model regresi linear dimana variabel dependennya tidak mengalami pembatasan nilai.

Namun dalam suatu penelitian, seringkali dijumpai bahwa variabel dependen Y perlu dibatasi untuk tujuan tertentu. Pembatasan penelitian pada suatu nilai tertentu pada suatu populasi menyebabkan distribusi data berubah.

Jika variabel dependen Y terbatas pada suatu titik tertentu, dan variabel independennya hanya diobservasi jika variabel dependennya diobservasi, maka model regresi ini disebut model regresi terpotong. Adanya pemotongan (*truncation*) menyebabkan ada tiga kemungkinan bentuk distribusi yang diperoleh, yaitu distribusi terpotong bawah, terpotong atas, atau terpotong atas bawah.

Data yang digunakan untuk regresi terpotong adalah data terpotong. Karena data terpotong, maka titik potongnya harus diketahui, misalkan *a* dan *b*, dimana *b* merupakan titik potong atas dan *a* merupakan titik potong bawah dari data yang diobservasi. Dapat diperoleh data terpotong atas bawah apabila hanya dilakukan observasi pada data yang berada diantara *a* dan *b* ($a < Y_i < b$).

Sampel distribusi normal terpotong diambil dari suatu subpopulasi sehingga jika populasinya berdistribusi normal, maka distribusi dari subpopulasi adalah distribusi normal terpotong (Greene, 1997 : 949). Dengan demikian pengetahuan tentang distribusi dari data yang sebenarnya diambil akan sangat membantu dalam pencarian estimator parameter regresi terpotong. Karakteristik data pada data terpotong, seperti mean dan variansi, juga akan ikut berubah. Hal ini menyebabkan model regresinya juga akan ikut berubah, sehingga perhitungan koefisien-koefisien regresi yang semula cukup mudah akan menjadi lebih sulit. Walaupun perhitungan koefisien-koefisien regresi terpotong menjadi lebih sulit, akan tetapi sangat diperlukan untuk menggunakan regresi terpotong ini dalam masalah-masalah tertentu.

Oleh karena itu, pengkajian tentang bagaimana cara mengestimasi parameter pada analisis regresi terpotong atas bawah menjadi penting. Apalagi kajian tentang analisis regresi terpotong atas bawah tersebut belum pernah didapatkan pada saat perkuliahan di Prodi Matematika Universitas Negeri Yogyakarta (UNY). Padahal didalam masalah sehari-hari, peneliti dapat saja menemukan masalah-masalah yang mengharuskan digunakannya analisis regresi terpotong atas bawah. Misalnya menggunakan analisis regresi terpotong untuk menggambarkan hubungan antara banyaknya lingkar tahun pada kayu, panjang kayu, dengan umur kayu. Dimana umur kayu dibatasi pada umur kayu yang lebih dari 10 tahun dan kurang dari 15 tahun. Untuk lebih memperjelas, maka akan diberikan contoh penerapan model regresi terpotong atas bawah.

B. Pembatasan Masalah

Skripsi ini membahas regresi terpotong atas bawah, yaitu model regresi dimana nilai variabel dependen Y dibatasi pada nilai $a < Y_i < b$, dengan a dan b merupakan suatu konstanta.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Jika nilai pada variabel dependen terpotong atas bawah, bagaimanakah mean, variansi, dan model regresi terpotong atas bawah?

2. Bagaimana cara memperoleh estimator parameter pada model regresi terpotong atas bawah?
3. Bagaimana contoh penerapan model regresi terpotong atas bawah?

D. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian atau pengkajiannya adalah:

1. Menjelaskan mean, variansi, dan model regresi terpotong atas bawah.
2. Menjelaskan cara memperoleh estimator parameter pada model regresi terpotong atas bawah.
3. Menjelaskan contoh penerapan model regresi terpotong atas bawah.

E. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian atau hasil kajian ini diharapkan dapat menambah referensi mahasiswa matematika dan statistika tentang teknik analisis regresi, khususnya analisis regresi terpotong atas bawah.

BAB II

DASAR TEORI

A. Distribusi Normal

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992 : 118)

Jika suatu variabel random kontinu X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 yang dinotasikan dengan X ~ N (μ, σ^2), maka X mempunyai fungsi densitas:

$$f\ (x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ untuk } -\infty < x < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty.$$

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992 : 119)

Jika X ~ N (μ, σ^2), maka variabel random $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mengikuti distribusi normal standar dengan mean 0 dan variansi 1 dinotasikan dengan Z ~ N (0,1), mempunyai fungsi densitas $\phi(z)$ = f (z | 0,1) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2}$, untuk $-\infty < z < \infty$.

Fungsi distribusi kumulatif Z didefinisikan sebagai $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt.$

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992 : 119)

Jika variabel random Z berdistribusi normal standar dengan fungsi densitas peluang $\phi(z)$, dapat ditunjukkan bahwa:

1. $\phi(z) = \phi(-z)$.
2. $\phi'(z) = -z\ \phi(z)$.

Bukti:

1. $\phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(-z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2} = \phi(z)$.

2. $\phi'(z) = \frac{\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\delta z}$ = -z $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ = -z ϕ(z).

B. Probabilitas Bersyarat dan Ekspetasi Bersyarat

Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt, 1992 : 153)

Jika X dan Y mempunyai fungsi densitas peluang bersama *f(x, y)*, maka fungsi peluang bersyarat dari X, dengan syarat Y = y adalah $f(x \mid y) = \frac{f\,(x,y)}{f\,(y)}$ dimana -∞ < y < ∞ dan *f*(*y*) > 0.

Teorema 2.1 (Greene, 1997 : 757)

Jika Y adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang $f(y)$ dan nilai a dan b adalah suatu konstanta, dengan Y terpotong atas pada nilai b dan terpotong bawah pada nilai a, maka fungsi densitas peluang dari peubah acak terpotong atas bawah Y adalah:

$$f(y|a < Y < b) = \frac{f(y)}{Prob\ (a < Y < b)}$$

asal $Prob(a < Y < b) > 0$.

Bukti:

$f(y)$ = $f(y|Y \leq a)Prob(Y \leq a) + f(y|a < Y < b)Prob(a < Y < b) +$

$f(y|Y \geq b)Prob(Y \geq b)$

Karena Y terpotong bawah pada nilai *a* dan terpotong bawah pada nilai *b*, maka Prob(Y ≤ *a*) = 0 dan Prob(Y ≥ *b*) = 0, diperoleh:

$$f(y) \ = \ 0 + \ f(y|a < Y < b)Prob(a < Y < b) + 0$$

$$= f(y|a < Y < b)Prob(a < Y < b)$$

sehingga

$$f(y|a < Y < b) = \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)}$$

Teorema 2.2

Y adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang $f(y)$ akan mempunyai suatu fungsi densitas peluang terpotong $f(y|a < Y < b)$, dimana a dan b suatu konstanta, apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $f(y|a < Y < b) \geq 0 \quad ; -\infty < y < +\infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y|a < Y < b) dy = 1$

Bukti:

1. Karena $f(y)$ merupakan fungsi densitas peluang yang memenuhi sifat $f(y) \geq 0$ untuk setiap y, maka $f(y) \geq 0$ dan $Prob(a < Y < b) > 0$ sehingga $f(y|a < Y < b) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y|a < Y < b) dy$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0\, dy + \int_{a}^{b} f(y|a < Y < b) dy + \int_{b}^{\infty} 0\, dy$$

$$= 0 + \int_{a}^{b} f(y|a < Y < b) dy + 0$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)} dy$$

$$= \frac{\int_{a}^{b} f(y) dy}{Prob(a < Y < b)}$$

$$= \frac{Prob(a < Y < b)}{Prob(a < Y < b)}$$

$= 1$

Dari bukti diatas dapat disimpulkan bahwa $f(y|a < Y < b)$ merupakan fungsi densitas peluang terpotong.

Definisi 2.5 (Bain & Engelhardt, 1992 : 180)

Jika X dan Y adalah peubah acak kontinu yang berdistribusi bersama dan mempunyai fungsi densitas peluang bersama *f(x, y)*, maka:

1. $E(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x \mid y)\, dx.$
2. $E(X^2 \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x \mid y)\, dx.$
3. $Var(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x \mid y)\, dx.$

C. Matriks

Teorema 2.3 (Greene, 1997: 51).

Jika vektor $\boldsymbol{A}' = [a_1\ \ a_2 \cdots\ a_n]$,

$x' = [x_1\ \ x_2 \cdots\ x_n]$,

maka: $\frac{\partial}{\partial x}(x'\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A}'x) = \boldsymbol{A}$.

Bukti:

$$x'\boldsymbol{A} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \boldsymbol{A}'x.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A}'x) = \boldsymbol{A}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{A}$$

Teorema 2.4 (Greene, 1997: 51).

Jika $y' = x'\boldsymbol{A}$, dengan $x' = [x_1 \ \ x_2 \cdots \ x_n]$ dan $\boldsymbol{A} = [a_1 \ \ a_2 \cdots \ a_k]$, maka:

$$y' = [y_1 \ \ y_2 \cdots \ y_k] = [x'a_1 \ \ x'a_2 \cdots \ x'a_k].$$

Dengan demikian:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$$

Bukti:

Berdasarka teorema 2.3, maka diperoleh:

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \left[\frac{\partial y_1}{\partial x} \ \frac{\partial y_2}{\partial x} \cdots \ \frac{\partial y_k}{\partial x}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial x' a_1}{\partial x} \ \frac{\partial x' a_2}{\partial x} \cdots \ \frac{\partial x' a_k}{\partial x}\right]$$

$$= [a_1 \ \ a_2 \cdots \ a_k]$$

$$= \boldsymbol{A}$$

D. Metode Kemungkinan Maksimum Likelihood

Definisi 2.6 (Bain & Engelhardt, 1992: 293)

Fungsi densitas peluang bersama dari n variabel random Y_1, Y_2, ..., Y_n yang tergantung pada θ, yaitu f, ditaksir di $y_1, y_2, \cdots, y_n$ nilainya $f(y_1, y_2, \cdots, y_n; \theta)$ disebut fungsi likelihood.

Untuk $y_1, y_2, \cdots, y_n$ konstan, $f(y_1, y_2, \cdots, y_n; \theta)$ hanya tergantung pada θ, dan dinotasikan $L(\theta)$. Apabila (Y_1, Y_2, ..., Y_n) merupakan sampel random berukuran *n* dari distribusi dengan fungsi densitas *f*, maka:

$$L(\theta) = f(y_1; \theta) f(y_2; \theta) \cdots f(y_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta)$$

Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt, 1992: 294)

Misalkan L adalah fungsi densitas peluang bersama dari (Y_1, Y_2, ..., Y_n), yang tergantung pada parameter θ, yaitu $L(\theta) = f(y_1, y_2, \cdots, y_n; \theta)$. Nilai dari θ yang menghasilkan nilai maksimum untuk $L(\theta)$ disebut ***Maksimum Likelihood Estimate (MLE)*** untuk θ, dan dinyatakan dengan simbol $\hat{\theta}$.

Jadi nilai $\hat{\theta}$ memenuhi:

$$f\left(y_1, y_2, \cdots, y_n; \hat{\theta}\right) = \max_{\theta \in \Omega} f(y_1, y_2, \cdots, y_n; \theta)$$

Untuk menentukan nilai $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\theta)$, $L(\theta)$ harus diderivatifkan dengan langkah – langkah sebagai berikut:

1. Nilai $\hat{\theta}$ diperoleh dari derivatif pertama.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0$$

2. Nilai $\hat{\theta}$ dikatakan memaksimumkan $L(\theta)$ jika:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(\theta)|_{\theta = \hat{\theta}} < 0$$

Selain memaksimumkan fungsi likelihood, nilai $\hat{\theta}$ juga memaksimumkan loglikelihood, $ln\ L(\theta)$. Nilai yang memaksimumkan $\ln L(\theta)$ diperoleh dengan cara sebagai berikut:

1. Nilai $\hat{\theta}$ diperoleh dari derivatif pertama.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = 0$$

2. Nilai $\hat{\theta}$ dikatakan memaksimumkan $\ln L(\theta)$ jika:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\theta)\,|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

Fungsi $\ln L(\theta)$ biasanya lebih sering digunakan karena penggunaannya lebih mudah dari pada $L(\theta)$.

E. Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson adalah salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan nonlinear secara iteratif, seperti persamaan Likelihood. Dasar dari metode ini adalah pendekatan deret Taylor (Greene, 1997:49). Deret Taylor:

$f(\theta) = f(\theta^0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{i\partial^i f(\theta^0)}{i!\,\partial(\theta^0)}(\theta - \theta^0)^i$, dimana θ^0 adalah nilai estimasi awal.

Penurunan rumus Newton Raphson yang digunakan untuk mencari nilai estimasi parameter dengan iterasi dari pendekatan deret Taylor adalah sebagai berikut:

Hampiran (pendekatan) dapat diperoleh dengan memotong deret setelah suku turunan pertama diperoleh, yaitu:

$$f(\theta) \cong f(\theta^0) + f'(\theta^0)(\theta - \theta^0)$$

dimana θ^0 adalah nilai estimasi awal yang diambil. $f(\theta)$ dapat ditulis $\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta}$ dimana pada perpotongan dengan sumbu θ, $\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = 0$. Persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \cong G\left(\theta^0\right) + H\left(\theta^0\right)\left(\theta - \theta^0\right)$$

dengan: $G(\theta^0)$ = derivatif pertama dari $F(\theta)$ pada saat $\theta = \theta^0$,

$H(\theta^0)$ = derivatif kedua dari $F(\theta)$ pada saat $\theta = \theta^0$.

karena $\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} = 0$, maka $0 = G(\theta^0) + H(\theta^0)(\theta - \theta^0)$. Dari persamaan dapat diperoleh estimasi baru, misal θ'.

$$\theta' = \theta^0 - \frac{G\left(\theta^0\right)}{H\left(\theta^0\right)}$$

Pada iterasi yang pertama akan didapat nilai estimasi θ^2, dengan mengganti θ^0 dengan θ', secara umum untuk iterasi ke-*m* dapat ditulis:

$$\theta^{m+1} = \theta^m - \frac{G(\theta^m)}{H(\theta^m)}$$

Persamaan diatas adalah rumus dari metode Newton Raphson untuk mencari estimasi $\hat{\theta}$ yang memaksimumkan suatu fungsi (Sahid, 2005: 158).

Lebih ringkas, langkah-langkah metode Newton Raphson tersebut adalah sebagai berikut:

1. Ambil estimasi awal dari θ, misal θ_0.
2. Didapat estimasi yang baru, yaitu $\hat{\theta}' = \hat{\theta}_0 - \frac{G(\hat{\theta}_0)}{H(\hat{\theta}_0)}$.

3. Pada iterasi pertama diperoleh $\widehat{\theta}^2$ dengan mengganti $\widehat{\theta}_0$ dengan $\widehat{\theta}'$, maka:

   $\widehat{\theta}^2 = \widehat{\theta}' - \frac{G\left(\widehat{\theta}'\right)}{H\left(\widehat{\theta}'\right)}$.

4. Secara umum iterasi ke-*m* didapat $\widehat{\theta}^{m+1} = \widehat{\theta}^m - \frac{G(\widehat{\theta}^m)}{H(\widehat{\theta}^m)}$.

5. Iterasi akan berhenti ketika $d = \left|\widehat{\theta}^m - \widehat{\theta}^{m+1}\right| \leq \varepsilon$, dengan ε mendekati nol, indeks *m* ukuran iterasi.

Metode Newton Raphson ini dapat diperluas untuk mendapatkan solusi persamaan dengan lebih dari satu parameter, misal $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p$ dan iterasinya sebagai berikut:

$$\widehat{\theta}^{m+1} = \widehat{\theta}^m - \frac{G\left(\widehat{\theta}^m\right)}{H\left(\widehat{\theta}^m\right)}$$

sedangkan $\widehat{\theta}^{m+1}$ dan $\widehat{\theta}^m$ dalam bentuk vektor:

$$\widehat{\theta}^{m+1} = \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1^{m+1} \\ \vdots \\ \widehat{\theta}_p^{m+1} \end{bmatrix} \text{ dan } \widehat{\theta}^m = \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1^m \\ \vdots \\ \widehat{\theta}_p^m \end{bmatrix}$$

Jika F merupakan fungsi dari *p* parameter, yaitu $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p$, maka:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \partial(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_p \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial x_1 \partial \theta'} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial x_p \partial \theta'} \end{bmatrix}$$

Dimana *H* disebut matrik Hessian dan vektor turunan parsial (vektor gradien derivatif pertama) dapat ditulis:

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

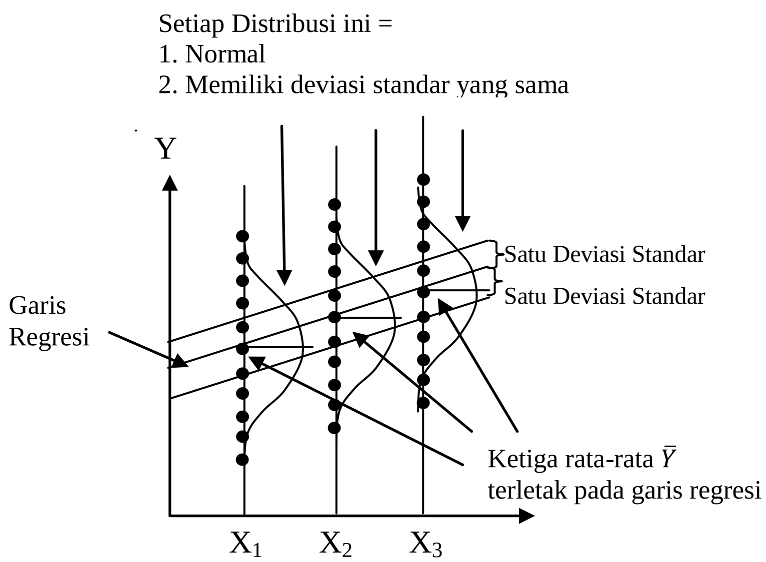
(Tulisan Dwi Inspriyanti, eprints.undip.ac.id/1387/1/Tulisan_siji.pdf).

F. Analisis Regresi Linier

Analisis regresi adalah suatu proses melakukan estimasi untuk memperoleh suatu hubungan antara suatu variabel dependen (terikat) dengan satu atau lebih variabel independen (bebas) (Atmaja, 2009 : 165).

Asumsi-asumsi yang mendasari model regresi linier (Atmaja, 2009 : 168) adalah:

1. Untuk setiap nilai X (variabel independen), terdapat suatu kelompok nilai Y (variabel dependen) dan nilai Y tersebut berdistribusi normal.



2. Rata-rata dari distribusi normal Y ini, semuanya terletak pada garis linier regresi.
3. Deviasi standar dari distribusi normal Y tersebut semuanya sama.
4. Nilai-nilai Y bersifat independen (tidak saling tergantung) secara statistik. Artinya, nilai Y yang dipilih untuk suatu nilai X tidak tergantung pada nilai Y untuk nilai X yang lain.

Untuk mengetahui apakah koefisien regresi β_i pada model regresi $Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + \ldots + X_p\beta_p + \varepsilon_i$ signifikan atau tidak signifikan, dapat dilakukan dengan menggunakan uji *t* (Nachrowi & Hardius Usman, 2002 : 24). Adapun langkah – langkah pengujian hipotesis yang dimaksud adalah

1. Hipotesis:

   H_0: $\beta_i = 0$

   H_1: $\beta_i \neq 0$
2. Taraf signifikasi: α
3. Statistik uji:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S\left(\hat{\beta}_i\right)}$$

   Akan tetapi karena yang akan diuji adalah apakah $\beta = 0$, maka nilai βi dalam persamaan harus diganti nol. Maka uji *t* menjadi:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{S\left(\hat{\beta}_i\right)}$$

4. Kriteria keputusan:

   Tolak hipotesis nol (H_0) apabila t hitung < $-t_{\alpha/2;\, n-p}$ atau t hitung > $t_{\alpha/2;\, n-p}$.
5. Perhitungan:
6. Kesimpulan:

G. Ukuran Statistik untuk Memilih Model Regresi Terbaik

Ada banyak ukuran statistik yang dapat digunakan untuk memilih model regresi terbaik. Namun disini penulis hanya menggunakan dua ukuran statistik, yaitu *R square* (R^2) dan *Adjusted* R^2 (R^2 disesuaikan), (R K Sembiring : 46).

1. Koefisien determinasi ganda (R^2).

   Nilai R^2 menunjukkan proporsi seberapa besar variabel independen mempengaruhi variabel dependen.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SSR}{SST}$$

dengan: SST = *Sum Square Total*,
SSR = *Sum Square Regression*,
SSE = *Sum Square Error*.

   Model regresi terbaik adalah model dengan nilai R^2 terbesar.

2. *Adjusted* R^2 (R^2 disesuaikan).

   Nilai R^2 diatas masih mempunyai kelemahan, yaitu besarnya dipengaruhi oleh peubah bebas dalam model, sehingga sulit menyatakan R^2 yang optimum. Untuk mengatasi kelemahannya maka digunakan *Adjusted* R^2.

$$Adjusted\ R^2 = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)} = 1 - \frac{(n-1)}{(n-p)}(1 - R^2)$$

dengan: SSE = *Sum Square Error*,
SST = *Sum Square Total*,
p = banyaknya parameter dalam regresi termasuk konstan,
n = banyak data.

   Model regresi terbaik adalah model dengan nilai *Adjusted* R^2 terbesar.

BAB III

PEMBAHASAN

Sebelum mencari estimasi parameter regresi terpotong atas bawah, harus diketahui terlebih dahulu karakteristik distribusi normal terpotong atas bawah untuk kemudian mencari model regresi terpotong atas bawah. Hal tersebut untuk mempermudah langkah selanjutnya dalam melakukan estimasi terhadap parameter-parameter regresi terpotong atas bawah. Untuk itu, berikut ini akan dicari terlebih dahulu karakteristik distribusi normal terpotong atas bawah dan model regresi terpotong atas bawahnya.

A. Mean, Variansi, dan Model Terpotong Atas Bawah

a. Mean dan Variansi Terpotong Atas Bawah

Sebelum pembentukan model regresi terpotong, terlebih dahulu harus ditentukan karakteristik distribusi normal terpotongnya. Dalam hal ini akan ditentukan mean terpotong dan variansi terpotong dari regresi terpotong atas bawah.

Teorema 3.1

Jika Y adalah suatu variabel random kontinu yang berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2, dan apabila Y terpotong atas pada nilai b dan terpotong bawah pada nilai a, maka mean terpotong dan variansi terpotongnya adalah:

i. $E(Y|a < Y < b) = \mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$

ii. $Var(Y|a < Y < b) = \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta)+\beta)}{(\lambda(\beta)-\beta)}\right)$

Dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$,

$\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$,

$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,

$\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,

$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z)\, dz.$

$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1$ *untuk setiap* α.

$\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1$ *untuk setiap* β.

Bukti:

Diketahui fungsi densitas terpotongnya adalah:

$$f(y|a < Y < b) = \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)}$$

Fungsi densitas terpotong tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

1) $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$

misal: $\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$,

maka diperoleh:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \ldots\ldots\ldots(1)$$

2) $Prob(a < Y < b) = \int_a^b f(y)dy$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy$$

misal: $t = \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$; $y = \sigma t + \mu$

$$dy = \sigma dt$$

untuk $y = a \rightarrow t = \frac{a-\mu}{\sigma}$;

$y = b \rightarrow t = \frac{b-\mu}{\sigma}$.

maka:

$$Prob(a < Y < b) = \int_{\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}^{\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt$$

$$= \int_{\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}^{\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$= \int_{\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}^{\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)} \phi(t) dt$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \ldots\ldots\ldots.(2)$$

Dari (1) dan (2), maka diperoleh:

$$f(y|a < Y < b) = \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

Setelah diketahui fungsi densitas peluang terpotong atas bawah, maka selanjutnya dapat dicari mean dan variansi terpotong atas bawah.

i. Mean terpotong atas bawahnya adalah

$$E(Y|a < Y < b) = \int_a^b y\, f(y|a < Y < b) dy$$

$$= \int_a^b \frac{y\, f(y)}{Prob(a < Y < b)} dy$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{y\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} dy$$

misal: $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$ dan $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$

$z = \frac{y-\mu}{\sigma}$; $y = \mu + \sigma z$,

$dy = \sigma dz$,

untuk $y = a \rightarrow z = \frac{a-\mu}{\sigma} = \alpha$,

$y = b \rightarrow z = \frac{b-\mu}{\sigma} = \beta$,

maka:

$E(Y|a < Y < b)$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\mu + \sigma z)\ \left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi(z)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \sigma dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} (\mu + \sigma z)\ \phi(z) dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \left(\mu \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z) dz + \sigma \int_{\alpha}^{\beta} z\ \phi(z) dz\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \left(\mu\ |\Phi(z)|_{\alpha}^{\beta} - \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ d\left(\frac{1}{2}z^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \left(\mu\left(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\right) - \sigma \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\right|_{\alpha}^{\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)} \left(\mu\left(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\right) - \sigma\left(\phi(\beta)-\phi(\alpha)\right)\right)$$

$$= \mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$$

Jadi, diperoleh $E(Y|a < Y < b) = \mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$, dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$,
$\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$,
$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,
$\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,
$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi(z)\, dz$.

ii. Variansi terpotong atas bawahnya adalah

$$Var(Y|a < Y < b) = E(Y^2|a < Y < b) - [E(Y|a < Y < b)]^2$$

Karena $E(Y^2|a < Y < b)$ belum diketahui, maka harus dicari terlebih dahulu.

$$E(Y^2|a < Y < b) = \int_a^b y^2\, f(y|a < Y < b)dy$$

$$= \int_a^b \frac{y^2\, f(y)}{Prob(a < Y < b)} dy$$

$$= \int_a^b \frac{y^2\, \left(\frac{1}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} dy$$

misal: $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$ dan $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$,

$z = \frac{y-\mu}{\sigma}$; $y = \mu + \sigma z$,

untuk $y = a \rightarrow z = \frac{a-\mu}{\sigma} = \alpha$

$$y = b \rightarrow z = \frac{b-\mu}{\sigma} = \beta$$

maka:

$E(Y^2|a < Y < b)$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\mu + \sigma z)^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right) \phi(z)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} \sigma dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\mu^2 + 2\mu\sigma z + \sigma^2 z^2)\ \phi(z)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} \left[\mu^2 \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z) dz + 2\mu\sigma \int_{\alpha}^{\beta} z\phi(z) dz + \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} z^2 \phi(z) dz \right]$$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} \left[\mu^2\ |\Phi(z)|_{\alpha}^{\beta} - 2\mu\sigma\ |\phi(z)|_{\alpha}^{\beta} + \sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz \right]$$

Untuk menyelesaikan integral $\int_{\alpha}^{\beta} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$ digunakan $\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$, dengan memisalkan:

$u = z, du = dz,$

$dv = z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$,

$$v = \int_{\alpha}^{\beta} dv = \int_{\alpha}^{\beta} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \square^{\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{\alpha}^{\beta} z\ \ \phi(z) dz = -\big(\phi(\beta) - \phi(\alpha)\big)$$

maka:

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz = \int_{\alpha}^{\beta} z\ z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} u\ dv$$

$$= u\,v - \int_{\alpha}^{\beta} v\,du$$

$$= -\big(\beta\,\phi(\beta) - \alpha\,\phi(\alpha)\big) - \int_{\alpha}^{\beta} -\phi(z)\,dz$$

$$= -\big(\beta\phi(\beta) - \alpha\,\phi(\alpha)\big) + \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z)\,dz$$

$$= -\big(\beta\,\phi(\beta) - \alpha\phi(\alpha)\big) + \big(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\big)$$

maka diperoleh:

$E(Y^2|a < Y < b)$

$$= \frac{1}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}\Big[\mu^2\,\big(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\big) - 2\mu\sigma\,\big(\phi(\beta) - \phi(\alpha)\big)$$

$$- \sigma^2\big(\beta\,\phi(\beta) - \alpha\,\phi(\alpha)\big) + \sigma^2\big(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\big)\Big]$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - 2\mu\sigma\big(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\big) - \sigma^2(\beta\lambda(\beta) - \alpha\lambda(\alpha))$$

dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}$, $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$,

$\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}$, $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$,

$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,

$\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,

$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z)\,dz.$

Karena nilai $E(Y^2|a < Y < b)$ sudah diketahui, maka dapat dicari variansi terpotongnya.

$Var(Y|a < Y < b)$

$$= E(Y^2|a < Y < b) - [E(Y|a < Y < b)]^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - 2\mu\sigma\,\big(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\big) - \sigma^2\big(\beta\lambda(\beta) - \alpha\lambda(\alpha)\big) -$$

$$[\mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))]^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - 2\mu\sigma\left(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\right) - \sigma^2\left(\beta\lambda(\beta) - \alpha\lambda(\alpha)\right) - \mu^2 +$$

$$2\mu\sigma\left(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\right) - \sigma^2\left(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\right)^2$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\beta\lambda(\beta) + \sigma^2\alpha\lambda(\alpha) - \sigma^2\lambda^2(\beta) - \sigma^2\lambda^2(\alpha) +$$

$$\sigma^2 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2[\lambda^2(\beta) + \beta\lambda(\beta)] - \sigma^2[\lambda^2(\alpha) - \alpha\lambda(\alpha)] +$$

$$\sigma^2 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2[\lambda(\beta)(\lambda(\beta) + \beta)] - \sigma^2[\lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha)] +$$

$$\sigma^2 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\left[\lambda(\beta)(\lambda(\beta) + \beta)\frac{(\lambda(\beta) - \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right] - \sigma^2[\delta(\alpha)] +$$

$$\sigma^2 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\left[\delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right] - \sigma^2[\delta(\alpha)] + \sigma^2 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$$

$$= \sigma^2\left(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\right) - \sigma^2\left[\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right]$$

Jadi, variansinya adalah $Var(Y|a < Y < b) = \sigma^2\left(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\right) - \sigma^2\left[\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta)+\beta)}{(\lambda(\beta)-\beta)}\right]$, dengan

$$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1\ untuk\ setiap\ \alpha.$$
$$\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1\ untuk\ setiap\ \beta.$$

Setelah diperoleh karakteristik dari distribusi normal terpotong atas bawah (mean dan variansi terpotong atas bawah), maka dapat dibuat tabel yang menjelaskan perbedaan antara distribusi normal dengan distribusi normal terpotong atas bawah. Perbedaan antara distribusi normal dengan distribusi normal terpotong atas bawah disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1
Perbedaan Distribusi Normal dengan Distribusi Terpotong Atas Bawah

Perbedaan	Distribusi Normal	Distribusi Terpotong Atas Bawah
Sumber data sampel	Populasi	Subpopulasi
Batas variabel dependen Y	$-\infty < Y < \infty$	$a < Y < b$
Mean	μ	$\mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$
Variansi	σ^2	$Var(Y\|a < Y < b)$ $= \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right)$

Dengan melihat hasil pada Tabel 3.1, dapat disimpulkan bahwa mean dan variansi dari distribusi normal dengan mean dan variansi dari distribusi normal terpotong atas bawah pada umumnya berbeda.

b. Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Pada model regresi linear diasumsikan bahwa variabel dependen Y berdistribusi normal. Model regresi linearnya ditulis sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \cdots + X_k\beta_k + \varepsilon.$$

Apabila percobaan dilakukan sebanyak n kali, maka persamaannya dapat ditulis:

$$y = \beta_0 + x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \cdots + x_{ki}\beta_k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Bentuk matriksnya dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dengan kata lain:

$$y_i = X_i^{'}\beta + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

dimana: $x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$, maka $X_i^{'} = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \cdots \quad x_{ni}]$,

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, dan $\varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$.

Disini x_{1i}, x_{2i}, …, x_{ki} adalah *fixed values* dari *k* variabel independen pada percobaan ke-*i*, y_i adalah variabel dependen pada eksperimen ke-i. β adalah parameter populasi yang besarnya tidak diketahui. Sedangakan ε_i disini diasumsikan berdistribusi normal independen dengan *mean* 0 dan *variansi* σ^2. ε_i dan ε_j tidak berkolerasi sehingga kovariansinya adalah $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ untuk semua $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sehingga didapat:

$E(Y_i|x_i) = X_i^{'}\beta.$

$Y_i|x_i \sim N\left(X_i^{'}\beta, ó^2\right).$

Maka mean dan variansi terpotong atas bawahnya menjadi:

$$\begin{aligned} E(Y_i|a < Y_i < b) &= \mu - \sigma\big(\curlywedge(\beta) - \curlywedge(\alpha)\big) \\ &= \mu - \sigma\left(\curlywedge\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \curlywedge\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= X_i^{'}\beta - \sigma\left(\curlywedge\left(\frac{b - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right) - \curlywedge\left(\frac{a - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

$$Var(Y_i|a < Y_i < b)$$

$$= \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right)$$

$$= \sigma^2\left(1 + 2\lambda\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\lambda\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right) -$$

$$\sigma^2\left(\delta\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) + \delta\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\frac{\left(\lambda\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) + \left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right)}{\left(\lambda\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right)}\right)$$

$$= \sigma^2\left(1 + 2\lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) -$$

$$\sigma^2\left(\delta\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right) + \delta\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right)\frac{\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) + \left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)}{\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)}\right)$$

Dari uraian di atas, maka model regresi terpotong atas bawahnya adalah:

$$Y_i^* = E(Y_i|a < Y_i < b) + \varepsilon_i$$

$$= X_i'\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon_i$$

dengan $Y_i^* = Y_i|a < Y_i < b$.

Adanya pengurangan suku $\sigma\left(\lambda\left(\frac{b-X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a-X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)$ menyebabkan model regresi terpotong atas bawahnya berbentuk nonlinear dalam β dan X_i.

ε_i mempunyai mean 0 dan variansinya:

$$Var(\varepsilon_i)$$

$$= \sigma^2\left(1 + 2\lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) -$$

$$\sigma^2\left(\delta\left(\frac{a-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)+\delta\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\frac{\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)+\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)}{\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)-\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)}\right)$$

Setelah mengetahui bentuk model regresi terpotong atas bawahnya, maka dapat dibuat tabel perbedaan antara model regresi linear dengan model regresi terpotong atas bawah. Perbedaan antara model regresi linear dengan model regresi terpotong atas bawah disajikan dalam Tabel 3.2.

Tabel 3.2
Perbedaan Model Regresi Linear dengan Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Perbedaan	Regresi Linear	Regresi Terpotong Atas Bawah
Batas variabel dependen Y	$-\infty < Y_i < \infty$	$a < Y_i < b$
Bentuk persamaan regresi	Linear $Y_i = X_i^{'}\beta + \varepsilon_i$	Nonlinear $Y_i = X_i^{'}\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)+\varepsilon_i$
Mean	$E(Y_i \mid x_i) = X_i^{'}\beta$	$E(y_i \mid a < Y_i < b)$ $= X_i^{'}\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)$
Variansi	$Var(Y_i) = \sigma^2$	$Var(y_i \mid a < Y_i < b)$ $= \sigma^2\left(1 + 2\lambda\left(\frac{a-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)$ $- \sigma^2\left(\delta\left(\frac{a-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right.$ $\left.+ \delta\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\frac{\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)+\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)}{\left(\lambda\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)-\left(\frac{b-X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)}\right)$

Karena model regresi terpotong atas bawah nonlinear, maka pengestimasian parameternya menggunakan metode kemungkinan maksimum atau *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE).

B. Estimasi Parameter Menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum

Metode kemungkinan maksimum adalah suatu metode estimasi parameter yang memaksimumkan Fungsi Likelihood. Sebelumnya telah didapat fungsi densitas peluang terpotong atas pada niali *b*, dan terpotong bawah pada nilai *a*, dengan variabel acak Y. Apabila variabel acak Y mengganti sampel acak $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dan mengganti μ dengan $X_i'\beta$ diperoleh fungsi densitas peluang terpotong sebagai berikut:

$$f(y_i|a < Y_i < b) = \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)}$$

maka didapat fungsi Likelihood:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|a < Y_i < b)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)}\right]$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)^2}\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[\Phi\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right]}$$

Sehingga fungsi Loglikelihood yang diperoleh:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)^2\right] -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\Phi\left(\frac{b - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(2\pi) - \ln\sigma^2 + \left(\frac{y_i - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)^2\right] -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\left(\Phi\left(\frac{b - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i^{'}\beta}{\sigma}\right)\right)\right]$$

misal: $\gamma = \frac{1}{\sigma}\beta$ dan $\theta = \frac{1}{\sigma}$ ………………………(3)

maka:

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(2\pi) - \ln\theta^2 + \left(\theta y_i - x_i^{'}\gamma\right)^2\right] -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\left(\Phi(\theta b - x_i^{'}\gamma) - \Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)\right)\right]$$

Nilai θ dan γ akan diestimasi menggunakan MLE:

$$G = \frac{\partial \ln L\ \ (\theta,\gamma)}{\partial\begin{pmatrix}\theta\\ \gamma\end{pmatrix}} = 0$$

Derivatif pertama dari ln L atau $\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}$, diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\ln(2\pi) - \ln\theta^2 + (\theta y_i - x_i^{'}\gamma)^2]\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\left(\Phi(\theta b - x_i^{'}\gamma) - \Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)\right)\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\theta^2}2\theta + 2y_i(\theta y_i - x_i'\gamma) + \frac{2\big(b\phi(\theta b - x_i'\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i'\gamma) - \Phi(\theta a - x_i'\gamma)}\right.$$
$$\left. - \frac{2\big(a\phi(\theta a - x_i'\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i'\gamma) - \Phi(\theta a - x_i'\gamma)}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i(\theta y_i - x_i'\gamma) - \frac{\big(b\phi(\theta b - x_i'\gamma) - a\phi(\theta a - x_i'\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i'\gamma) - \Phi(\theta a - x_i'\gamma)}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i(\theta y_i - x_i'\gamma) - b\frac{\phi(\beta_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)} + a\frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i(\theta y_i - x_i'\gamma) - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]$$

dengan: $\lambda(\alpha_i) = \frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}$, $\alpha_i = (\theta a - x_i'\gamma)$

$\lambda(\beta_i) = \frac{\phi(\beta_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}$, $\beta_i = (\theta b - x_i'\gamma)$

$z_i = (\theta y_i - x_i'\gamma)$

Sedangkan untuk $\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \gamma}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\ln(2\pi) - \ln\theta^2 + (\theta y_i - x_i'\gamma)^2]\right] +$$
$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\Big(\Phi(\theta b - x_i'\gamma) - \Phi(\theta a - x_i'\gamma)\Big)\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[-2x_i(\theta y_i - x_i^{'}\gamma) - \frac{2x_i\big(\phi(\theta b - x_i^{'}\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i^{'}\gamma) - \Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)} + \frac{2x_i\big(\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i^{'}\gamma) - \Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[x_i(\theta y_i - x_i^{'}\gamma) + \left(\frac{x_i\big(\phi(\theta b - x_i^{'}\gamma)\big) - x_i\big(\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)\big)}{\Phi(\theta b - x_i^{'}\gamma) - \Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[x_i z_i + x_i\big(\lambda(\beta_i) - \lambda(\alpha_i)\big)\right]$$

Sehingga gradient derivatif pertamanya:

$$G = \frac{\partial \ln L\ (\theta,\gamma)}{\partial \begin{pmatrix}\theta\\ \gamma\end{pmatrix}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right] \\ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i z_i + x_i\big(\lambda(\beta_i) - \lambda(\alpha_i)\big)\right] \end{bmatrix}$$

Nilai G = 0 tidak dapat memberikan penyelesaian ,karena setelah loglikelihood diturunkan, turunannya masih mengandung parameter lain yang tidak diketahui nilainya. Maka akan digunakan metode Newton Raphson. Pada metode ini dibutuhkan juga derivatif kedua. Untuk mempermudah penurunan, maka terlebih dahulu kita cari:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(\alpha_i)}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\big(\theta a - x_i^{'}\gamma\big)\\ &= a\ \phi(\theta a - x_i^{'}\gamma)\\ &= a\ \phi(\alpha_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(\alpha_i)}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\phi\big(\theta a - x_i^{'}\gamma\big)\\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2}\right]\\ &= -\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ a\ (\theta a - x_i^{'}\gamma)\ e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a\;(\theta a - x_i^{'}\gamma)\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2} \\
&= -a\;(\theta a - x_i^{'}\gamma)\;\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma) \\
&= -a\;(\alpha_i)\;\phi(\alpha_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda(\alpha_i)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}\right] \\
&= \frac{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)\left(-a\;(\alpha_i)\phi(\alpha_i)\right) - \phi(\alpha_i)\left(b\;\phi(\beta_i) - a\;\phi(\alpha_i)\right)}{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)^2} \\
&= \frac{-a\;(\alpha_i)\;\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)} - \frac{\phi(\alpha_i)\left(b\;\phi(\beta_i) - a\;\phi(\alpha_i)\right)}{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)^2} \\
&= -a\;(\alpha_i)\;\lambda(\alpha_i) - \lambda(\alpha_i)\left(b\;\lambda(\beta_{a}) - a\;\lambda(\alpha_i)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\alpha_i)}{\partial \gamma^{'}} &= \frac{\partial}{\partial \gamma^{'}}\Phi(\theta a - x_i^{'}\gamma) \\
&= (-\,x_i^{'})\;\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma) \\
&= -x_i^{'}\;\phi(\alpha_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(\alpha_i)}{\partial \gamma^{'}} &= \frac{\partial}{\partial \gamma^{'}}\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma) \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma^{'}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2}\right] \\
&= -\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;(-\,x_i^{'})\;(\theta a - x_i^{'}\gamma)\;e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2} \\
&= (\,x_i^{'})\;(\theta a - x_i^{'}\gamma)\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}\left(\theta a - x_i^{'}\gamma\right)^2} \\
&= \;x_i^{'}\;(\theta a - x_i^{'}\gamma)\;\phi(\theta a - x_i^{'}\gamma) \\
&= \;x_i^{'}\;(\alpha_i)\;\phi(\alpha_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda(\alpha_i)}{\partial \gamma^{'}} &= \frac{\partial}{\partial \gamma^{'}}\left[\frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}\right] \\
&= \frac{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)\left(\,x_i^{'}\;(\alpha_i)\;\phi(\alpha_i)\right) - \phi(\alpha_i)\left(-x_i^{'}\;\phi(\beta_i) +\;x_i^{'}\;\phi(\alpha_i)\right)}{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)^2} \\
&= \frac{x_i^{'}\;(\alpha_i)\;\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)} + \frac{\phi(\alpha_i)\left(\,x_i^{'}\;\phi(\beta_i) -\;x_i^{'}\;\phi(\alpha_i)\right)}{\left(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\right)^2} \\
&= \;x_i^{'}\;(\alpha_i)\;\lambda(\alpha_i) + \lambda(\alpha_i)\left(\,x_i^{'}\;\lambda(\beta_i) -\;x_i^{'}\;\lambda(\alpha_i)\right)
\end{aligned}
$$

maka derivatif kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\theta}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\,\partial\theta}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i(\theta y_i - x_i^{'}\gamma) - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[-\frac{1}{\theta^2} - y_i y_i - b\left(-b\ (\beta_i)\ \lambda(\beta_i) - \lambda(\beta_i)\big(b\ \lambda(\beta_i) - a\ \lambda(\alpha_i)\big)\right)$$
$$+ a\ \left(-a\ (\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i) - \lambda(\alpha_i)\big(b\ \lambda(\beta_i) - a\ \lambda(\alpha_i)\big)\right)\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[-\frac{1}{\theta^2} - y_i^2 + b^2(\beta_i)\ \lambda(\beta_i) + b\ \lambda(\beta_i)\big(b\ \lambda(\beta_i) - a\ \lambda(\alpha_i)\big)$$
$$- a^2(\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i)\ - a\ \lambda(\alpha_i)\big(b\ \lambda(\beta_i) - a\ \lambda(\alpha_i)\big)\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[-\frac{1}{\theta^2} - y_i^2 + b^2(\beta_i)\ \lambda(\beta_i) + b^2\ \lambda^2(\beta_i) - a\ b\lambda(\alpha_i)\ \lambda(\beta_i)$$
$$- a^2(\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i)\ - a\ b\lambda(\alpha_i)\ \lambda(\beta_i) + a^2\lambda^2(\alpha_i)\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[-\frac{1}{\theta^2} - y_i^2 + b^2(\beta_i)\ \lambda(\beta_i) + b^2\ \lambda^2(\beta_i) - 2a\ b\lambda(\alpha_i)\ \lambda(\beta_i)$$
$$- a^2(\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i) + a^2\lambda^2(\alpha_i)\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\xi_{11\ i}$$

Derivatif kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\gamma'}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\,\partial\gamma'}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\gamma'}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \gamma'} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\theta} - y_i(\theta y_i - x_i^{'}\gamma) - b\lambda(\beta_i) + a\lambda(\alpha_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[x_i^{'} y_i - \; b\left(\, x_i^{'} \; (\beta_i) \, \lambda(\beta_i) + \lambda(\beta_i)\big(\, x_i^{'} \; \lambda(\beta_i) - \; x_i^{'} \; \lambda(\alpha_i)\big)\right)$$

$$+ \, a\left(\, x_i^{'} \; (\alpha_i) \, \lambda(\alpha_i) + \lambda(\alpha_i)\big(\, x_i^{'} \; \lambda(\beta_i) - \; x_i^{'} \; \lambda(\alpha_i)\big)\right)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x_i^{'} y_i - \; b \, x_i^{'} \; (\beta_i) \, \lambda(\beta_i) - b \, x_i^{'} \; \lambda^2(\beta_i) + b \, x_i^{'} \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i)$$

$$+ \, a \, x_i^{'} \; (\alpha_i) \, \lambda(\alpha_i) + a \, x_i^{'} \; \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i) - a \, x_i^{'} \; \lambda^2(\alpha_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_{21\;i}$$

Derivatif kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \; \partial \theta}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \, \partial \theta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sum_{i=1}^{n} [x_i z_i + x_i \lambda(\beta_i) - x_i \lambda(\alpha_i)]\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sum_{i=1}^{n} [x_i(\theta y_i - x_i^{'}\gamma) + x_i \lambda(\beta_i) - x_i \lambda(\alpha_i)]\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{n} \Big[x_i y_i + x_i\left(-b \; (\beta_i) \, \lambda(\beta_i) - \lambda(\beta_i)\big(b \, \lambda(\beta_i) - a \, \lambda(\alpha_i)\big)\right)$$

$$- \, x_i\left(-a \; (\alpha_i) \, \lambda(\alpha_i) - \lambda(\alpha_i)\big(b \, \lambda(\beta_i) - a \, \lambda(\alpha_i)\big)\right)\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i - b x_i(\beta_i) \, \lambda(\beta_i) - b \, x_i \lambda^2(\beta_i) + a \, x_i \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i)$$

$$+ \, a x_i(\alpha_i) \, \lambda(\alpha_i) + b \, x_i \; \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i) - a x_i \lambda^2(\alpha_i)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i - b x_i(\beta_i) \, \lambda(\beta_i) - b \, x_i \lambda^2(\beta_i) + a x_i(\alpha_i) \, \lambda(\alpha_i)$$

$$- \, a x_i \lambda^2(\alpha_i) + (a + b)\left(x_i \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i)\right)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_{12\;i}$$

Sedangkan untuk $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\ \partial\gamma'}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\ \partial\gamma'} \\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma'}\left[\sum_{i=1}^{n}[x_i z_i + x_i \lambda(\beta_i) - x_i \lambda(\alpha_i)]\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_{i=1}^{n}[x_i(\theta y_i - x_i'\gamma) + x_i \lambda(\beta_i) - x_i \lambda(\alpha_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big[-x_i x_i' + x_i\Big(x_i'\ (\beta_i)\ \lambda(\beta_i) + \lambda(\beta_i)\big(x_i'\ \lambda(\beta_i) - x_i'\ \lambda(\alpha_i)\big)\Big) \\
&\qquad\qquad - x_i\Big(x_i'\ (\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i) + \lambda(\alpha_i)\big(x_i'\ \lambda(\beta_i) - x_i'\ \lambda(\alpha_i)\big)\Big)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[-x_i x_i' + \square_i x_i'\ (\beta_i)\ \lambda(\beta_i) + x_i\ x_i' \lambda^2(\beta_i) - x_i\ x_i'\ \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i) \\
&\qquad\qquad - x_i\ x_i'\ (\alpha_i)\ \lambda(\alpha_i) - x_i x_i'\ \lambda(\alpha_i)\lambda(\beta_i) + x_i\ x_i' \lambda^2(\alpha_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\xi_{22\ i}
\end{aligned}
$$

diperoleh matriks Hessian:

$$
H = \frac{\partial \ln L\ (\theta,\gamma)}{\partial\begin{pmatrix}\theta\\ \gamma\end{pmatrix}(\theta,\gamma)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\xi_{11\ i} & \sum_{i=1}^{n}\xi_{12\ i} \\ \sum_{i=1}^{n}\xi_{21\ i} & \sum_{i=1}^{n}\xi_{22\ i} \end{bmatrix}
$$

Dengan demikian estimasi parameter dengan menggunakan bantuan Metode Newton Raphson menjadi:

$$
\begin{bmatrix}\hat{\theta}^{m+1}\\ \hat{\gamma}^{m+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\theta}^{m}\\ \hat{\gamma}^{m}\end{bmatrix} - [H^m]^{-1}(G^m)
$$

Setelah pengestimasian (θ,γ), maka berdasarkan persamaan (3) estimasi (β,σ) dapat dilakukan dengan $\hat{\gamma} = \frac{1}{\hat{\theta}}\hat{\beta}$ dan $\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\theta}}$. Untuk perhitungan $\hat{\beta}_i$ dilakukan dengan menggunakan software eviews 5, dimana estimasi parameter yang diperoleh menggunakan bantuan metode iterasi numerik Newton Raphson.

Setelah diperoleh estimasi parameter (β, σ), maka model regresi terpotong atas bawah dapat dibentuk. Namun sebelumnya dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisien yang diperoleh, untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien tersebut signifikan atau tidak signifikan untuk dimasukkan kedalam persamaan regresi. Pengujiannya dilakukan dengan menggunakan software eviews 5.

Untuk mendapatkan estimasi parameter (β, σ) dapat dilakukan dengan beberapa metode, seperti LSE (*Leas Square Error*), Metode Momen, dan lainnya. Tetapi karena bentuk persamaan regresi nonlinear menyebabkan estimasi parameternya tidak diperoleh, hal tersebut karena turunan pertama yang disamadengankan nol tidak memberikan solusi. Jika estimasi parameternya tidak diperoleh, maka uji koefisien tidak dapat dilakukan.

Dalam sekripsi ini, penulis menggunakan metode MLE (*Maksimum Likelihood Estimation*) yang memiliki sifat lebih umum sebagai acuan untuk menentukan distribusi dari estimasi parameter, sehingga uji koefosien regresi dapat dilakukan.

Pada regresi linier pengujian terhadap H_0: $\beta_i = \beta_i$ menggunakan statistik: $\frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{S\,(\widehat{\beta}_i)} \sim t_{n-p}$,

dengan n = banyak data, dan
p = banyak parameter dalam model regresi termasuk konstanta.

Pada regresi terpotong atas bawah, pengujian terhadap H$_0$: $\beta_i = \beta_i^*$ menggunakan statistik: $\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{\frac{1}{n} E\left(\frac{\partial}{\partial\beta} \ln f(y_i \mid a < Y_i < b;\beta)\right)^2}} \sim N(0,1)$,

dengan $(y_i \mid a < Y_i < b) = \dfrac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

C. Penerapan Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Untuk lebih memperjelas kajian tentang analisis regresi terpotong atas bawah, maka akan diberikan contoh penerapan model regresi terpotong atas bawah seperti berikut ini.

Contoh 1.

Sebuah penelitian akan dilakukan untuk mengetahui hubungan antara modal usaha, biaya pemasaran, dengan besar penjualan pertahun pada 30 tempat usaha. Berdasarkan UU No.9/1995 bahwa definisi industri menengah adalah mempunyai nilai penjualan pertahun lebih dari Rp.1 milyar dan nilai penjualan kurang dari Rp.5 milyar (http://Ifip.org/english/pdf/bali-seminar/regulasi%20dam%20revitalisasi%20-%20sri%20adiningsih.pdf). Oleh karena itu, penelitian ini dibatasi pada nilai penjualan pertahun lebih dari Rp. 1 milyar dan kurang dari Rp. 5 milyar. Data berikut diilhami dari jurnal Kajian Faktor-faktor yang Mempengaruhi Perkembangan Usaha UKM (www.smecda.com/kajian/files/jurnal/Hal124.pdf), yang disajikan dalam Tabel 3.3.

Tabel 3.3
Besar Modal (X_1), Biaya Pemasaran (X_2), dan Nilai Penjualan (Y)

No.	Nilai Penjualan (Y) (ribuan)	Besar Modal (X_1) (ribuan)	Biaya Pemasaran (X_2) (ribuan)
1.	1970800	1236500	5250
2.	3950300	2575300	15750
3.	2760300	1540000	6750
4.	3450000	1350800	7350
5.	2930000	1750400	5320
6.	2760300	1220500	9350
7.	2750700	1382000	12000
8.	1980400	1520000	7500
9.	3780500	1575300	15750
10.	2960300	1540000	6750
11.	3450900	1500000	10000
12.	1950700	1135400	6500
13.	2530000	1750400	5320
14.	4330300	2150300	17350
15.	4200800	1420000	8450
16.	2150900	1976300	11350
17.	4550600	2850500	20750
18.	3546800	2150000	8900
19.	2800500	1300800	6750
20.	1870600	1150000	7350
21.	1980400	1520000	7500
22.	1670600	1050000	7350
23.	4130400	2050700	25900
24.	3780500	1575300	15750
25.	4550600	2850500	20750
26.	1770800	1236500	5250
27.	2150900	1976300	11350
28.	4550600	2850500	20750
29.	4430300	2650300	17350
30.	4200800	2420000	8450

a. Hubungan Antara Besar Modal (X_1), Biaya Pemasaran (X_2), dan Nilai Penjualan (Y)

Hubungan antara besar modal, biaya pemasaran, dengan nilai penjualan dapat dimodelkan sebagai berikut:

Model regresi linier:

$Y_i = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$

Model regresi terpotong atas bawahnya adalah

$$Y^* = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{5000000 - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{1000000 - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon$$

dengan $Y^* = \hat{Y} | 1000000 < Y < 5000000$.

b. Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Linier

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien – koefisiennya untuk mengetahui apakah koefisien – koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan. Sebelumnya akan dilakukan analisis regresi linier dimana variabel dependennya dianggap berdistribusi normal tanpa pemotongan.

a) Uji normalitas

1. Hipotesis

   H_0: Data tidak berasal dari populasi berdistribusi normal.

   H_1: Data berasal dari populasi berdistribusi normal.

2. Taraf signifikasi: α = 0,05
3. Statistik uji: Uji Kolmogorov-Smirnov
4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,05.
5. Hitungan dari Lampiran 2 (perhitungan menggunakan SPSS) didapat nilai *p-value* = 0,041.
6. Kesimpulan:

   Karena *p-value* = 0,041 < 0,05, maka H_0 ditolak.

Jadi, data berasal dari populasi berdistribusi normal.

b) Uji Linier untuk Model Regresi Linier

1. Hipotesis

   H_0: Tidak ada hubungan linier antara besar modal, biaya pemasaran, dengan nilai penjualan.

   H_1: Ada hubungan linier antara besar modal, biaya pemasaran, dengan nilai penjualan.

2. Taraf signifikasi: α = 0,05

3. Statistik uji:

   $F = \frac{SSR/k}{SSE/n-(k+1)}$, dengan: SSR = *Sum of Square Regression*

   SSE = *Sum of Square Error*.

4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,05.

5. Hitungan dari Lampiran 3 (perhitungan menggunakan SPSS) didapat nilai *p-value* = 0,000.

6. Kesimpulan:

   Karena *p-value* = 0,000 < 0,05, maka H_0 ditolak.

   Jadi, ada hubungan linier antara besar modal, biaya pemasaran, dengan nilai penjualan.

Selanjutnya akan diuji koefisien untuk regresi linier dengan model regresi sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2$$

c) **Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Linier**

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisiennya untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan,

1. Hipotesis:

   H_0: $\beta_i = 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

   H_1: $\beta_i \neq 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

2. Taraf signifikasi: $\alpha = 0{,}05$

3. Statistik uji:

   $t = \frac{\hat{\beta}_i}{S\,(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-p}$, dengan $S\,(\hat{\beta}_i)$ adalah standar error $\hat{\beta}_i$.

4. Kriteria keputusan:

   Tolak H_0 jika p-value < 0,025.

5. Perhitungan:

   Perhitungan nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* berdasarkan data sampel dikerjakan menggunakan program SPSS. Nilai-nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* diambil dari Lampiran 3, dan disajikan dalam Tabel 3.4.

Tabel 3.4
Nilai koefisien, t hitung, dan *p-value* Persamaan Regresi Linier.

Variabel	**Koefisien**	**t hitung**	***p-value***
C	926664,657	2,413	0,023
X1	0,793	2,695	0,012
X2	71,228	2,479	0,020

6. Kesimpulan:

   Dari Tabel 3.4, dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien X_1, X_2, dan konstanta signifikan pada taraf 5%. Hal tersebut ditunjukkan dengan melihat nilai *p-value* dari X_1, X_2, dan konstanta yang kurang dari 2,5%. Berarti besar modal (X_1), biaya pemasaran (X_2), dan konstanta berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen Y (nilai penjualan).

c. Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisien untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan.

1. Hipotesis:

   H_0: $\beta_i = 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

   H_1: $\beta_i \neq 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

2. Taraf signifikasi: $\alpha = 0{,}05$

3. Statistik uji:

   $$Z = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{var\ (\hat{\beta}_i)}} \sim N(0{,}1)\ ,$$

   dengan $var\left(\hat{\beta}_i\right) = \frac{1}{n}\ E\ \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f\left(y \mid a < Y_i < b;\ \beta\right)\right)^2$

4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,025.

5. Perhitungan:

   Perhitungan nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* berdasarkan data sampel dikerjakan menggunakan program eviews5. Perhitungan nilai koefisien atau perameter dugaan $\hat{\beta}_i$ dengan metode Newton Raphson konvergen pada iterasi ke-4. Nilai-nilai koefisien, statistik uji, dan *p-value* diambil dari Lampiran 1 dan disajikan dalam Tabel 3.5.

Tabel 3.5
Nilai Koefisien Regresi Terpotong atas Bawah, Nilai z hitung, dan *p-value*.

Variabel	Koefisien	Z hitung	*p-value*
C	546377,1	1,087361	0,0169
X_1	0,946264	2,668474	0,0076
X_2	87,81095	2,486981	0,0129

6. Kesimpulan:

   Dari Tabel 3.5, dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien X_1, X_2, dan konstanta signifikan pada taraf 5%. Hal tersebut ditunjukkan dengan melihat nilai *p-value* dari X_1, X_2, dan konstanta yang kurang dari 2,5%. Berarti besar modal (X_1), biaya pemasaran (X_2), dan konstanta berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen Y (nilai penjualan).

Jadi, hubungan antara variabel dependen dengan variabel independennya dapat digambarkan dalam bentuk model regresi terpotong atas bawah dengan koefisien yang signifikan sebagai berikut:

$$Y^* = 536477{,}1 + 0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{5000000 - (0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{1000000 - (0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2)}{\sigma}\right)\right)$$

dengan $Y^* = \hat{Y}|\ 1000000 < Y < 5000000.$

Model regresi terpotong dugaan diatas dapat digunakan untuk memprediksi nilai penjualan. Misalkan sebuah usaha kecil menengah ingin mengetahui besar penjualan pertahun, dengan modal (X_1) yang dimiliki Rp.1.100.000 (ribuan) dan biaya pemasarannya (X_2) Rp.7.500 (ribuan), maka prediksi nilai penjualan pertahunnya:

$$Y^* = 536477{,}1 + 0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{5000000 - (0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{1000000 - (0{,}946264X_1 + 87{,}81095X_2)}{\sigma}\right)\right)$$

dengan $Y^* = \hat{Y}|\ 1000000 < Y < 5000000.$

Masukkan nilai-nilai X_1 dan X_2 pada model regresi diatas dan nilai dugaan σ = 985953,2 (yang diperoleh dengan melihat Lampiran 1), maka diperoleh:

$$Y^* = 536477{,}1 + 0{,}946264(1100000) + 87{,}81095(7500) - \sigma\left(\lambda\left(\frac{5000000 - \big(0{,}946264(1100000) + 87{,}81095(7500)\big)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{1000000 - \big(0{,}946264(1100000) + 87{,}81095(7500)\big)}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 546377{,}1 + 1040890{,}4 + 658582{,}125$$
$$- \sigma\left(\lambda\left(\frac{3300527{,}475}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{-699472{,}525}{\sigma}\right)\right)$$
$$= 2245849{,}625$$
$$-985953{,}2\left(\left(\frac{\phi(3{,}347549838)}{\Phi(3{,}347549838) + \Phi(0{,}7094378567)}\right) - \left(\frac{\phi(-0{,}7094378567)}{\Phi(3{,}347549838) + \Phi(0{,}7094378567)}\right)\right)$$
$$= 3142711{,}351$$

Jadi, untuk modal (X_1) yang dimiliki Rp.1.100.000 (ribuan) dan biaya pemasarannya (X_2) Rp.7.500 (ribuan) diperoleh dugaan nilai penjualan sebesar Rp. 3142711,351 (ribuan)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa model regresi terpotong atas bawah lebih tepat digunakan untuk kasus data terpotong dibandingkan model regresi linier.

d. Membandingkan Regresi Terpotong Atas Bawah dengan Regresi Linier

Untuk mengetahui model regresi yang terbaik antara model regresi terpotong atas bawah dengan regresi linier, dapat dilakukan dengan membandingkan nilai ukuran statistik R^2 dan *Adjusted* R^2nya. Perbandingan nilai ukuran statistik R^2 dan *Adjusted* R^2 diambil dari Lampiran 1 dan Lampiran 3, dan disajikan dalam Tabel 3.6.

Tabel 3.6
Nilai Ukuran Statistik *R^2* dan *Adjusted* *R^2* pada Model Regresi Terpotong Atas Bawah dan Regresi Linier.

R^2		***Adjusted R^2***	
terpotong	**Tidak terpotong**	**terpotong**	**Tidak terpotong**
0,642753	0,638	0,601532	0,601

Dari Tabel 3.6, dapat disimpulkan bahwa model regresi terpotong atas bawah lebih tepat digunakan dalam kasus data terpotong dibandingkan dengan analisis regresi linier. Hal tersebut karena nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi terpotong lebih besar dibandingkan dengan nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi linier.

Contoh 2.

Sebuah penelitian akan dilakukan untuk mengetahui hubungan antara persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran pada 26 daerah. Berdasarkan standar yang ditetapkan oleh BPS (Badan Pusat Statistik), angka kematian bayi per 1000 kelahiran tergolong sedang apabila kematian bayi diantara 40 sampai 70 angka kematian (http:dinkes-sulsel.go.id/new/index2.php). Oleh karena itu, penelitian ini dibatasi pada angka kematian bayi per 1000 kelahiran yang lebih dari 40 tetapi kurang dari 70 angka kematian bayi. Data berikut diilhami dari data dalam buku Ekonometrika Teori dan Aplikasi untuk ekonomi dan bisnis Edisi Kedua karangan Widarjono (2007 : 201) yang menunjukkan hubungan antara Persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita

Berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran, namun sudah dimodifikasi agar menjadi sebuah data yang terpotong atas bawah, sesuai tujuan penelitian.

Tabel 3.7
Data Persentase Persalinan Bayi Ditolong Bidan atau Dokter (X_1), Persentase Balita Berstatus Gizi Baik (X_2), dengan Angka Kematian Bayi per 1000 Kelahiran (Y)

Daerah	Persentase Persalinan Bayi Ditolong Bidan atau Dokter (X_1)	Persentase Balita Berstatus Gizi Baik (X_2)	Angka Kematian Bayi per 1000 Kelahiran (Y)
1	67,0	64,4	43,0
2	79,0	64,7	42,0
3	59,0	56,0	50,0
4	66,0	82,7	41,0
5	56,0	67,1	45,0
6	61,0	63,8	48,0
7	50,0	63,0	53,0
8	57,0	60,9	46,0
9	94,0	77,4	41,0
10	49,0	62,8	57,0
11	57,0	69,5	42,0
12	78,0	71,6	43,0
13	57,0	69,3	53,0
14	79,0	74,0	45,0
15	35,0	50,3	69,0
16	29,0	61,3	60,0
17	45,0	58,0	54,0
18	56,0	71,5	42,0
19	54,0	63,0	69,0
20	67,0	73,9	41,0
21	68,0	64,2	46,0
22	47,0	65,1	65,0
23	53,0	66,1	45,0
24	35,0	70,5	52,0
25	41,0	72,9	42,0
26	46,0	70,7	54,0

a. Hubungan Antara Persentase Persalinan Bayi Ditolong Bidan atau Dokter (X_1), Persentase Balita Berstatus Gizi Baik (X_2), dengan Angka Kematian Bayi per 1000 Kelahiran (Y)

Hubungan antara persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran dapat dimodelkan sebagai berikut:

Model regresi linier: $Y_i = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$

Model regresi terpotong atas bawahnya adalah

$$Y^* = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{70 - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{40 - (X_1\beta_1 + X_2\beta_2)}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon$$

dengan $Y^* = \widehat{Y} | \, 40 < Y < 70.$

b. Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Linier

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisiennya untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan. Sebelumnya akan dilakukan analisis regresi linier dimana variabel dependennya dianggap berdistribusi normal tanpa pemotongan.

a) Uji normalitas

1. Hipotesis

   H_0: Data tidak berasal dari populasi berdistribusi normal.

   H_1: Data berasal dari populasi berdistribusi normal.

2. Taraf signifikasi: α = 0,05

3. Statistik uji: Uji Kolmogorov-Smirnov

4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,05.

5. Hitungan dari Lampiran 5 (perhitungan menggunakan SPSS) didapat nilai *p-value* = 0,010.
6. Kesimpulan:

   Karena *p-value* = 0,010 < 0,05, maka H_0 ditolak.

   Jadi, data berasal dari populasi berdistribusi normal.

b) Uji Linier untuk Model Regresi Linier

1. Hipotesis

   H_0: Tidak ada hubungan linier antara Persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita Berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran.

   H_1: Ada hubungan linier antara Persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita Berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran.
2. Taraf signifikasi: α = 0,05
3. Statistik uji:

   $F = \frac{SSR/k}{SSE/n-(k+1)}$, dengan: SSR = Sum of Square Regression

   SSE = Sum of Square Error.
4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,05.
5. Hitungan dari Lampiran 6 (perhitungan menggunakan SPSS) didapat nilai *p-value* = 0,000.
6. Kesimpulan:

   Karena *p-value* = 0,000 < 0,05, maka H_0 ditolak.

Jadi, ada hubungan linier antara Persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter, persentase balita Berstatus gizi baik, dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran.

Selanjutnya akan diuji koefisien untuk regresi linier dengan model regresi sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2$$

c) Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Linier

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisiennya untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan,

1. Hipotesis:

   H_0: $\beta_i = 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

   H_1: $\beta_i \neq 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

2. Taraf signifikasi: α = 0,05

3. Statistik uji:

   $t = \frac{\hat{\beta}_i}{S\,(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-p}$, dengan $S\,(\hat{\beta}_i)$ adalah standar error $\hat{\beta}_i$.

4. Kriteria keputusan:

   Tolak H_0 jika p-value < 0,025.

5. Perhitungan:

   Perhitungan nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* berdasarkan data sampel dikerjakan menggunakan program SPSS. Nilai-nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* diambil dari Lampiran 6, dan disajikan dalam Tabel 3.8.

Tabel 3.8
Nilai koefisien, t hitung, dan *p-value* Persamaan Regresi Linier.

Variabel	**Koefisien**	**t hitung**	***p-value***
C	97,937	8,095	0,000
X1	-0,242	-2,602	0,016
X2	-0,518	-2,550	0,018

6. Kesimpulan:

   Dari Tabel 3.8, dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien X_1, X_2, dan konstanta signifikan pada taraf 5%. Hal tersebut ditunjukkan dengan melihat nilai *p-value* dari X_1, X_2, dan konstanta yang kurang dari 2,5%. Berarti persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter (X_1), persentase balita berstatus gizi baik (X_2), dan konstanta berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen Y (angka kematian bayi per 1000 kelahiran).

c. Uji Koefisien Secara Parsial untuk Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Harus dilakukan pengujian terhadapkoefisien-koefisiennya untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien regresi tersebut signifikan atau tidak signifikan.

1. Hipotesis:

   H_0: $\beta_i = 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

   H_0: $\beta_i \neq 0$; $i = 0, 1,$ dan 2.

2. Taraf signifikasi: $\alpha = 0{,}05$
3. Statistik uji:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{var\ (\hat{\beta}_i)}} \sim N(0{,}1)\ ,$$

dengan $var\left(\widehat{\beta}_i\right) = \frac{1}{n}\, E\, \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f\left(y \mid a < Y_i < b;\, \beta\right)\right)^2$

4. Kriteria keputusan: Tolak H_0 jika *p-value* < 0,025.
5. Perhitungan:

   Perhitungan nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* berdasarkan data sampel dikerjakan menggunakan program eviews5. Perhitungan nilai koefisien atau perameter dugaan $\widehat{\beta}_i$ dengan metode Newton Raphson konvergen pada iterasi ke-9. Nilai-nilai koefisien, satistik uji, dan *p-value* diambil dari Lampiran 4 dan disajikan dalam Tabel 3.9.

Tabel 3.9
Nilai Koefisien Regresi Terpotong atas Bawah, Nilai z hitung, dan *p-value*

Variabel	Koefisien	Z hitung	*p-value*
C	204,2678	2,097836	0,0359
X_1	-0,895263	-1,469855	0,1416
X_2	-1,701203	-1,468110	0,1421

6. Kesimpulan:

   Dari Tabel 3.9, dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien X_1, X_2, dan konstanta signifikan pada taraf 5%. Hal tersebut ditunjukkan dengan melihat nilai *p-value* dari X_1, X_2, dan konstanta yang kurang dari 2,5%. Berarti persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter (X_1), persentase balita berstatus gizi baik (X_2), dan konstanta berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen Y (angka kematian bayi per 1000 kelahiran).

Jadi, hubungan antara variabel dependen dengan variabel independennya dapat digambarkan dalam bentuk model regresi terpotong atas bawah dengan koefisien yang signifikan sebagai berikut:

$$Y^* = 204{,}2678 - 0{,}895263X_1\text{-}1{,}701203X_2$$
$$- \sigma\left(\lambda\left(\frac{70 - (-0{,}895263X_1 - 1{,}701203X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{40 - (-0{,}895263X_1 - 1{,}701203X_2)}{\sigma}\right)\right)$$

dengan $Y^* = \hat{Y} | \, 40 < Y < 70$.

Model regresi terpotong dugaan diatas dapat digunakan untuk memprediksi angka kematian bayi per 1000 kelahiran pada suatu daerah. Misalkan pada kota A ingin mengetahui angka kematian bayi per 1000 kelahiran dikotanya. Kota A tersebut hanya mempunyai data persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter (X_1) sebesar 59 dan persentase balita berstatus gizi baik (X_2) sebesar 72, maka prediksi angka kematian bayi per 1000 kelahiran:

$$Y^* = 204{,}2678 - 0{,}895263X_1\text{-}1{,}701203X_2$$
$$- \sigma\left(\lambda\left(\frac{70 - (-0{,}895263X_1 - 1{,}701203X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{40 - (-0{,}895263X_1 - 1{,}701203X_2)}{\sigma}\right)\right)$$

dengan $Y^* = \hat{Y} | \, 40 < Y < 70$.

Masukkan nilai – nilai X_1 dan X_2 pada model regresi diatas dan σ = 8,608046 (yang diperoleh dengan melihat Lampiran 4), maka diperoleh:

$$Y^* = 204{,}2678 - 0{,}895263(59)\text{-}1{,}701203(72)$$
$$- \sigma\left(\lambda\left(\frac{70 - (-0{,}895263(59) - 1{,}701203(72))}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{40 - (-0{,}895263(59) - 1{,}701203(72))}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 204{,}2678 - 52{,}820517 - 122{,}486616 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{-245{,}307133}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{-215{,}307133}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 28{,}960667 - 8{,}608046\left(\left(\frac{\phi(-28{,}49742357)}{\Phi(-28{,}49742357) + \Phi(25{,}01231209)}\right) - \left(\frac{\phi(-25{,}01231209)}{\Phi(-28{,}49742357) + \Phi(25{,}01231209)}\right)\right)$$

= 23

Jadi, Persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter (X_1) sebesar 59 dan persentase balita Berstatus gizi baik (X_2) sebesar 72 diperoleh dugaan angka kematian bayi per 1000 kelahiran 23 bayi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa model regresi terpotong atas bawah lebih tepat digunakan untuk kasus data terpotong dibandingkan model regresi linier.

d. Membandingkan Regresi Terpotong Atas Bawah dengan Regresi Linier

Untuk mengetahui model regresi yang terbaik antara model regresi terpotong atas bawah dengan regresi linier, dapat dilakukan dengan membandingkan nilai ukuran statistik R^2 dan *Adjusted* R^2nya.

Perbandingan nilai ukuran statistik R^2 dan *Adjusted* R^2 diambil dari Lampiran 4 dan Lampiran 6, dan disajikan dalam Tabel 3.10.

Tabel 3.10
Nilai Ukuran Statistik R^2 dan *Adjusted* R^2 pada Model Regresi Terpotong Atas Bawah dan Regresi Linier

R^2		*Adjusted* R^2	
terpotong	**Tidak terpotong**	**terpotong**	**Tidak terpotong**
0,564680	0,519	0,505318	0,478

Dari Tabel 3.10, dapat disimpulkan bahwa model regresi terpotong atas bawah lebih tepat digunakan dalam kasus data terpotong dibandingkan dengan analisis regresi linier. Hal tersebut karena nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi terpotong lebih besar dibandingkan dengan nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi linier.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Pada analisis regresi terpotong atas bawah:

1. Mean, variansi, dan model regresi terpotong atas bawah.

   Pembatasan nilai pada variabel dependen menyebabkan distribusinya berubah menjadi distribusi normal terpotong atas bawah.

   a) Mean terpotong atas bawah:

   $$E(Y|a < Y < b) = \mu - \sigma(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$$

   b) Variansi terpotong atas bawah:

   $$Var(Y|a < Y < b) = \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta) + \beta)}{(\lambda(\beta) - \beta)}\right)$$

   Dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\alpha = \frac{a-\mu}{\sigma}$,

   $\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\beta = \frac{b-\mu}{\sigma}$,

   $\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,

   $\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,

   $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(z)\, dz.$

   $\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1\ untuk\ setiap\ \alpha.$

   $\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1\ untuk\ setiap\ \beta.$

c) Model regresi terpotongnya adalah sebagai berikut:

$$Y_i^* = E(Y_i|a < Y_i < b) + \varepsilon_i$$
$$= X_i'\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon_i$$

dengan $Y_i^* = Y_i|a < Y_i < b$.

2. Estimasi model regresi terpotong menjadi lebih kompleks dan membutuhkan metode interatif, misalnya Metode Newton Raphson. Penyelesaian dengan iterasi tersebut akan lebih mudah apabila dikerjakan menggunakan bantuan komputer (eviews5). Pada regresi terpotong atas bawah, pengujian terhadap H_0: $\beta_i = \beta_i^*$ menggunakan statistik:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{\frac{1}{n} E\left(\frac{\partial}{\partial\beta} \ln f(y_i|\, a<Y_i<b;\beta)\right)^2}} \sim N(0,1),$$

dengan $(y_i|\, a < Y_i < b) = \dfrac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)}$, *i = 1, 2, ..., n.*

3. Penerapan model regresi terpotong.

   a. Pada contoh (1) model regresi terpotong diterapkan untuk menduga nilai penjualan (Y) yang terbatas atas pada nilai penjualan Rp.5.000.000 (ribuan) dan terbatas bawah pada penjualan Rp.1.000.000 (ribuan), sebagai fungsi dua variabel, yaitu besar modal (X_1) dan biaya pemasaran (X_2). Variabel-variabel tersebut mempunyai hubungan dengan nilai penjualan (Y).

   b. Pada contoh (2) model regresi terpotong diterapkan untuk menduga angka kematian bayi per 1000 kelahiran (Y) yang terbatas atas pada nilai 70 dan terbatas bawah pada nilai 40, sebagai fungsi dua variabel, yaitu persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter (X_1) dan persentase balita berstatus gizi baik (X_2). Variabel-variabel tersebut mempunyai hubungan dengan angka kematian bayi per 1000 kelahiran (Y).

c. Untuk kasus data terpotong, model regresi terpotong lebih tepat digunakan daripada regresi linier. Untuk mengetahui bahwa model regresi terpotong lebih tepat digunakan daripada regresi linier dilakukan dengan membandingkan nilai R^2 dan *Adjusted* R^2. Hasilnya nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi terpotong untuk dua contoh yang dibahas lebih besar dibandingkan dengan nilai R^2 dan *Adjusted* R^2 pada regresi linier.

B. Saran

Dalam skripsi ini dikaji tentang analisis regresi terpotong atas bawah, padahal apabila variabel dependen Y dibatasi akan menyebabkan tiga bentuk distribusi, yaitu distribusi terpotong atas, terpotong bawah, dan terpotong atas bawah. Karena dalam sekripsi sebelumnya sudah dikaji tentang analisis regresi terpotong atas, mungkin untuk selanjutnya dapat dikaji tentang analisis regresi terpotong bawah dan penerapannya.

DAFTAR PUSTAKA

Atmaja, Lukas Setia. (2009). *Statistika untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: CV. ANDI OFFSET.

Bain, Lee J & Max Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Matematical Statistic Secon Edition*. Belmont, California: Dugbury press.

http://dinkes-sulsel.go.id/new/index2.php. 12 Januari 2011.

http://eprints.undip.ac.id/1387/1/Tulisan_siji.pdf. 12 Januari 2011.

http://Ifip.org/english/pdf/bali-seminar/regulasi%20dam%20revitalisasi%20-%20sri%20adiningsih.pdf. 12 Januari 2011.

Greene, William . H. (1997). *Econometric Analysis Trird Edition*. New Jersey: Pretice Hall.

Nachrowi, Djalal & Hardius Usman. (2002). *Penggunaan Teknik Ekonometri*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.

Sahid. (2005). *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.

Sembiring, R. K. (2003). *Analisis Regresi Edisi Kedua*. Bandung: ITB.

Widarjono, Agus. (2007). *Ekonometrika Teori dan Aplikasi untuk Ekonomi dan Bisnis Edisi Kedua*. Yogyakarta: EKONISIA.

www.smecda.com/kajian/jurnal/files/jurnal/Hal124.pdf. 12 Januari 2011.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Newton-Raphson)
Date: 05/19/11 Time: 01:08
Sample: 1 30
Included observations: 30
Truncated sample
Left censoring (value) series: 1000000
Right censoring (value) series: 5000000
Convergence achieved after 5 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	546377.1	502480.2	1.087361	0.0169
X1	0.946264	0.354609	2.668474	0.0076
X2	87.81095	35.30825	2.486981	0.0129
		Error Distribution		
SCALE:C(4)	634444.4	99968.42	6.346448	0.0000

R-squared	0.642753	Mean dependent var	3129720.
Adjusted R-squared	0.601532	S.D. dependent var	985953.2
S.E. of regression	622376.2	Akaike info criterion	29.51296
Sum squared resid	1.01E+13	Schwarz criterion	29.69978
Log likelihood	-438.6943	Hannan-Quinn criter.	29.57272
Avg. log likelihood	-14.62314		

Left censored obs	0	Right censored obs	0
Uncensored obs	30	Total obs	30

LAMPIRAN 2

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Penjualan (ribuan)	30	100.0%	0	.0%	30	100.0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Penjualan (ribuan)	Mean		3.13E6	1.800E5
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2.76E6	
		Upper Bound	3.50E6	
	5% Trimmed Mean		3.13E6	
	Median		2.95E6	
	Variance		9.721E11	
	Std. Deviation		9.860E5	
	Minimum		1670600	
	Maximum		4550600	
	Range		2880000	
	Interquartile Range		2039725	
	Skewness		.042	.427
	Kurtosis		-1.480	.833

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Penjualan (ribuan)	.140	30	.041	.911	30	.016

a. Lilliefors Significance Correction

LAMPIRAN 3

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	.799[a]	.638	.601	614708.332	1.767

a. Predictors: (Constant), Biaya Pemasaran (ribuan), Besar Modal (ribuan)

b. Dependent Variable: Penjualan (ribuan)

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1.799E13	2	8.994E12	23.803	.000[a]
	Residual	1.020E13	27	3.779E11		
	Total	2.819E13	29			

a. Predictors: (Constant), Biaya Pemasaran (ribuan), Besar Modal (ribuan)

b. Dependent Variable: Penjualan (ribuan)

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	926664.657	384064.431		2.413	.023
	Besar Modal (ribuan)	.793	.294	.449	2.695	.012
	Biaya Pemasaran (ribuan)	71.228	28.738	.413	2.479	.020

a. Dependent Variable: Penjualan (ribuan)

LAMPIRAN 4

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Newton-Raphson)
Date: 03/31/11 Time: 11:26
Sample: 1 26
Included observations: 26
Truncated sample
Left censoring (value) series: 40
Right censoring (value) series: 70
Convergence achieved after 9 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	204.2678	97.37069	2.097836	0.0359
X1	-0.895263	0.609083	-1.469855	0.1416
X2	-1.701203	1.158771	-1.468110	0.1421
		Error Distribution		
SCALE:C(4)	9.117723	3.773332	2.416359	0.0157

R-squared	0.564680	Mean dependent var	49.53846
Adjusted R-squared	0.505318	S.D. dependent var	8.608046
S.E. of regression	6.054353	Akaike info criterion	5.781500
Sum squared resid	806.4141	Schwarz criterion	5.975053
Log likelihood	-71.15950	Hannan-Quinn criter.	5.837236
Avg. log likelihood	-2.736904		

Left censored obs	0	Right censored obs	0
Uncensored obs	26	Total obs	26

LAMPIRAN 5

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
angka kematian bayi per 1000 kelahiran	26	100.0%	0	.0%	26	100.0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
angka kematian bayi per 1000 kelahiran	Mean		49.538	1.6882
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	46.062	
		Upper Bound	53.015	
	5% Trimmed Mean		48.932	
	Median		46.000	
	Variance		74.098	
	Std. Deviation		8.6080	
	Minimum		41.0	
	Maximum		69.0	
	Range		28.0	
	Interquartile Range		12.0	
	Skewness		1.071	.456
	Kurtosis		.257	.887

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
angka kematian bayi per 1000 kelahiran	.198	26	.010	.857	26	.002

a. Lilliefors Significance Correction

LAMPIRAN 6

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	.721[a]	.519	.478	6.2215	2.380

a. Predictors: (Constant), persentase balita berstatus gisi baik, persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter

b. Dependent Variable: angka kematian bayi per 1000 kelahiran

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	962.201	2	481.101	12.429	.000[a]
	Residual	890.260	23	38.707		
	Total	1852.462	25			

a. Predictors: (Constant), persentase balita berstatus gisi baik, persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter

b. Dependent Variable: angka kematian bayi per 1000 kelahiran

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	97.937	12.098		8.095	.000
	persentase persalinan bayi ditolong bidan atau dokter	-.242	.093	-.425	-2.602	.016
	persentase balita berstatus gisi baik	-.518	.203	-.417	-2.550	.018

a. Dependent Variable: angka kematian bayi per 1000 kelahiran